ТЕМА: Повторення. Показникова та логагифмічна функції

Основні властивості показникової функції y=ax.
1. Область визначення функції ax – множина R дійсних чисел.
2. Область значень функції ax (якщо a≠1) – множина R+ всіх додатних дійсних чисел. Якщо a=1, функція ax при всіх x стала: вона дорівнює 1.
3. Якщо a>1, функція ax зростає на всій числовій прямій; якщо 0<a<1, функція ax спадає на множині R.


Основні властивості логарифмічної функції y=logax.
1. Область визначення логарифмічної функції – множина R+ всіх додатних чисел.
2. Область значень логарифмічної функції – множина R всіх дійсних чисел.
3. Логарифмічна функція на всій області визначення R+ зростає, якщо a>0 і спадає, якщо 0<a<1.

Властивості степенів
Для будь-яких x, y і додатних a і b справедливі рівності:
a0=1; a1=1;
ax·ay=ax+y; ax:ay=ax-y;
(ax)y=axy; (ab)x=axbx;


Властивості логарифмів
1. Якщо x>0, то
x=alogax.
2. Логарифм основи дорівнює одиниці
log aa=1.
3. Логарифм одиниці дорівнює нулю
loga1=0 .
4. Якщо x1>0 і x2>0, то
loga(x1x2)=logax1+logax2,

5. Якщо x>0, то logaxp=plogax,
де p – будь-яке дійсне число.
6. Якщо x>0, b>0, b≠1, то

Зокрема,

logab=logapbp=plogapb

Показникові та логарифмічні рівняння
1. Показникове рівняння
af(x)=bg(x) (a>0, a≠1, b>0, b≠1)
рівносильне рівнянню
f(x)logca=g(x)logcb,
де c>0, c≠1.

2. Показникове рівняння
af(x)=ag(x) (a>0, a≠1)
рівносильне рівнянню
f(x)=g(x).

Приклад 1
Розв’язати рівняння
1/4·4x2=8·(0,5)3x
Розв'язання
2-2·(22)x2·(2-1)3x;
2-2·22x2=23·2-3x;
2-2+2x2=23-3x;
-2+2x2=3-3x;
2x2+3x-5=0;
x1=1; x2=-2,5.
Відповідь: x1=1; x2=-2,5.

Приклад 2
Розв’язати рівняння
3·4x+2x·3x-2·9x=0.
Розв'язання 3·(2x)2+2x·3x-2·(3x)2=0.
Це є однорідне рівняння. Поділимо ліву і праву частину рівняння на (3x)2.
3·((2/3)x)2+(2/3)x-2=0
Нехай (2/3)x=t, тоді
3·t2+t-2=0;
t1=2/3; t2=-1<0 - стороній корінь
(2/3)x=2/3;
x=1.
Відповідь: x=1.

3. Коренями рівняння
(u(x))f(x)=(u(x))g(x),
є розв'язки мішаної системи

і ті значення x, для яких u(x)=1, якщо при цих значеннях визначені f(x) і g(x).

4. Логарифмічне рівняння
logaf(x)=b
рівносильне рівнянню
f(x)=ab.

Приклад 3
Розв’язати рівняння log2(x2+4x+3)=3.
Розв'язання
Задане рівняння рівносильне рівнянню
x2+4x+3=23;
x2+4x+3=8;
x2+4x-5=0;
x1=-5; x2=1.
Відповідь: x1=-5; x2=1.

5. Логарифмічне рівняння
logaf(x)=logag(x)
рівносильне одній з таких систем


Приклад 4
Розв’язати рівняння log3(x2-4x-5)=log3(7-3x).
Розв'язання
Задане рівняння рівносильне системі

Область визначення рівняння:

Відповідь: x1=-3.

6. Для розв'язування рівнянь
logaf(x)+logag(x)=logau(x),
logaf(x)-logag(x)=logau(x),
plogaf(x)=logau(x)
їх приводять до вигляду
loga(f(x)g(x))=logau(x),

logaf(x)p=logau(x).
Із знайдених коренів треба включити у відповідь ті, для яких f(x)>0, g(x)>0, u(x)>0.

Приклад 5
Розв’язати рівняння lg(x+3)-21lg(x-2)=lg0,4.
Розв'язання
Область визначення рівняння:

Застосовуючи властивості логарифмів, виконаємо деякі перетво-рення:
lg(x+3)=lg(x-2)2+lg0,4;
x+3=0,4(x-2)2; 0,4x2-2,6x-1,4=0; 2x2-13-7=0; x1=7; x2=-1/2. x2=-1/2 - не входить до області визначення.
Відповідь: x=7.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 7. Якщо при розв'язуванні рівняння застосовують перетворення виду loga(f(x)g(x)), | https://web.posibnyky.vntu.edu.ua/icgn/9krayevskij_matem_dovuzpidgot_studinozem/736/12.jpg | loga(f(x))p, |

де p – парне число, то виникає небезпека втрати коренів заданого рівняння.
Щоб запобігти втраті коренів треба користуватись формулами у такому вигляді:
loga(f(x)g(x))=loga|f(x)|+loga|g(x)|,

|  |  |
| --- | --- |
| https://web.posibnyky.vntu.edu.ua/icgn/9krayevskij_matem_dovuzpidgot_studinozem/736/12.jpg | =loga|f(x)|-loga|g(x)| |

loga(f(x))p=ploga|f(x)|.

Показникові і логарифмічні нерівності

Показникова нерівність (exponential inequality) af(x)>ag(x)
при a>1 рівносильна нерівності
f(x)>g(x), а при 0<a<1 – нерівності
f(x)<g(x).

Логарифмічна нерівність (logarithmic inequality) logaf(x)>logag(x)
при a>1 рівносильна системі нерівностей

а при 0<a<1 – системі нерівностей


Приклад 6
Розв’язати нерівність
log0,2(x2-x-2)>log0,2(-x2+2x+3).
Розв'язання
Користуючись властивістю логарифмічної функції, отримаємо, що дана нерівність рівносильна системі нерівностей:

Розв’язуємо кожну нерівність системи:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| а) | б) | в) |
| x2-x-2>0, | -x2+2x+3>0 | x2-x-2>-x2+2x+3 |
| x1=2, x2=-1 | x2-2x-3<0 | 2x2-3x-5>0 |
|  | x1=-1, x2=3 | x1=-1, x2=2,5 |
| https://web.posibnyky.vntu.edu.ua/icgn/9krayevskij_matem_dovuzpidgot_studinozem/736/16.jpg | https://web.posibnyky.vntu.edu.ua/icgn/9krayevskij_matem_dovuzpidgot_studinozem/736/17.jpg | https://web.posibnyky.vntu.edu.ua/icgn/9krayevskij_matem_dovuzpidgot_studinozem/736/18.jpg |
| x∈(-∞;-1)∪(2;∞) | x∈(-1;3) | x∈(-∞;-1)∪(2,5;∞) |

Знайдемо розв’язання системи:

Відповідь: x∈(2,5;3).

Приклад 7

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Розв’язати нерівність | https://web.posibnyky.vntu.edu.ua/icgn/9krayevskij_matem_dovuzpidgot_studinozem/736/20.jpg | (x-1)-log2(x-1)-2≤0 |

Розв'язання
Нехай log2(x-1)=t,
t2-t-2≤0,


Дана система рівносильна такій системі:

Відповідь: x∈[3/2;5].

Вправи

1. Знайти область визначення функції:


2. Перевірити рівності:

|  |  |
| --- | --- |
| а) log39=2; | в) log5125=3; |
| б) lo416=2; | https://web.posibnyky.vntu.edu.ua/icgn/9krayevskij_matem_dovuzpidgot_studinozem/736/25.jpg |

3. Знайти x, якщо:
а) xlog20,125=-2;

г) log3(x-2)=2;


4. Обчислити:
а) 2log525+3log264;
б) log2log216;
в) log636+5log749+4log1/24.

5. Знайти x:
а) 2log3x=3log3x-2;
б) 5log2x-3log749=2log2x;
в) (log3x)2-3log3x+2=0;
г) (log2x)2-log2x-2=0;

6. Знайти область визначення функції:

|  |  |
| --- | --- |
| а) y=log2(x2-1); | в) y=log3log0,5x. |
| https://web.posibnyky.vntu.edu.ua/icgn/9krayevskij_matem_dovuzpidgot_studinozem/736/28.jpg |  |

7. Порівняти x і y:

|  |  |
| --- | --- |
| а) log3x<log3y | в) logπx>logπy. |
| б) log0,1x<log0,1y; |  |

8. Порівняти:

|  |  |
| --- | --- |
| а) log89 чи log98; | в) log55 чи log66; |
| б) log41 чи log51; | г) log0,150,15 чи log22. |

9. Обчислити:

|  |  |
| --- | --- |
| а) 101-2lg10; | https://web.posibnyky.vntu.edu.ua/icgn/9krayevskij_matem_dovuzpidgot_studinozem/736/29.jpg |

10. Знайти x:
a) lgx=lg7-lg3+lg2;

в) lgx=3lga+2lgb-4lgc.

11. Довести рівності:


12. Обчислити A, якщо:


13. Знайти значення виразів:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| а) 10lg12; | б) 101-lg2,5; | в) 0,1lg6-lg2. |

14. Записати числа в стандартному вигляді (a·10n, де 1<a<10):
123; 14,36; 8500; 13750; 13,7; 3; 715; 19,14; 0,81; 0,305; 123000000; 0,00895; 0,0000001; 0,0007001.

15. Знайти значення виразів:

|  |  |
| --- | --- |
| а) lg153-lg15,3; | в) lg0,08-lg272+lg3800. |
| б) lg14,24-lg85,44+lg60; |  |

16. Розв'язати рівняння:

|  |  |
| --- | --- |
| а) 3-x=81; | е) 2x-2=1; |
| б) 22x-1=8; | ж) 193x+x-2=1; |
| https://web.posibnyky.vntu.edu.ua/icgn/9krayevskij_matem_dovuzpidgot_studinozem/736/33.jpg | и) 3x+3x+1;к) 2x-1+2x-2+2x-3=448;л) 32x-3x=702;https://web.posibnyky.vntu.edu.ua/icgn/9krayevskij_matem_dovuzpidgot_studinozem/736/34.jpg |
|  |
|  |
|  |

17. Розв'язати рівняння:

б) 12x+27x=2·8x;

г) 27x-13·9x+13·3x+1-27=0;


ж) (x-3)3x2-10x+3=1;
и) |x-3|3x2-10x+3=1;
к) (x-3)x2-x=(x-3)2.

18. Розв'язати системи рівнянь:


19. Розв'язати рівняння:
a) log3x=2;

г) log4log2x+log2log4x=2;
д) log4x+17+log9x7=0;

ж) log2(4·3x-6)-log2(9x-6)=1;

м) |log2(3x-1)-log23|=|log2(5-2x)-1|.

20. Розв'язати системи рівнянь:

|  |  |
| --- | --- |
| https://web.posibnyky.vntu.edu.ua/icgn/9krayevskij_matem_dovuzpidgot_studinozem/736/44.jpg | https://web.posibnyky.vntu.edu.ua/icgn/9krayevskij_matem_dovuzpidgot_studinozem/736/45.jpg |

21. Розв'язати нерівності:

|  |  |
| --- | --- |
| а) 3x>81; | г) 0,32x2-3x+6<0,00243; |
| https://web.posibnyky.vntu.edu.ua/icgn/9krayevskij_matem_dovuzpidgot_studinozem/736/46.jpg | д) 5·23x-24·25-3x+56≤0 |
| в) 0,5x2-4x<8; | е) (x-3)x2-7x>1. |

22. Розв'язати нерівності:

|  |  |
| --- | --- |
| а) log2(3x+1)>log2(x-1); | д) log4(x+7)>log2(x+1); |
| https://web.posibnyky.vntu.edu.ua/icgn/9krayevskij_matem_dovuzpidgot_studinozem/736/47.jpgг) log0,5(2x+3)≤log0,5(4x-1); | https://web.posibnyky.vntu.edu.ua/icgn/9krayevskij_matem_dovuzpidgot_studinozem/736/48.jpg |

<https://www.youtube.com/watch?v=W5Au-mfJmPY>

<https://www.youtube.com/watch?v=pYETDnIUqKw>

<https://www.youtube.com/watch?v=c4sTdf9ltRs>